Plan de PROLINLOG

<u>Mardi 2 mai 2023 :</u>

1. Programmation linéaire
2. Programmation linéaire en nombres entiers

<u>Mercredi 3 mai 2023 :</u>

3. Modélisation
4. Optimisation multicritère et dualité.

<u>Lundi 15 mai 2023 :</u> Travaux Pratiques

<u>Mercredi 17 mai 2023 :</u> Partiel

Programmation linéaire
Heure 1

Philippe Morignot, Adrien Pain

pmorignot@yahoo.fr

Formulation

- **Modèle :**
  – Variables réelles.
  – Contraintes linéaires.
  – Fonction linéaire, voire quadratique.
- **L'algorithme du simplexe fournit :**
  – Une solution : une valeur par variable, qui ensemble satisfont les contraintes.
  – Optimale : le meilleur jeu de valeurs selon la fonction linéaire.
- **Références :**
  – George B. Dantzig, *Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities*, 1947. Published pp. 339–347 in T.C. Koopmans (ed.):*Activity Analysis of Production and Allocation*, New York-London 1951 (Wiley & Chapman-Hall).
  – Eric Jacquet-Lagrèze, *Programmation linéaire. Modélisation et mise en oeuvre informatique*, Economica, 1998.

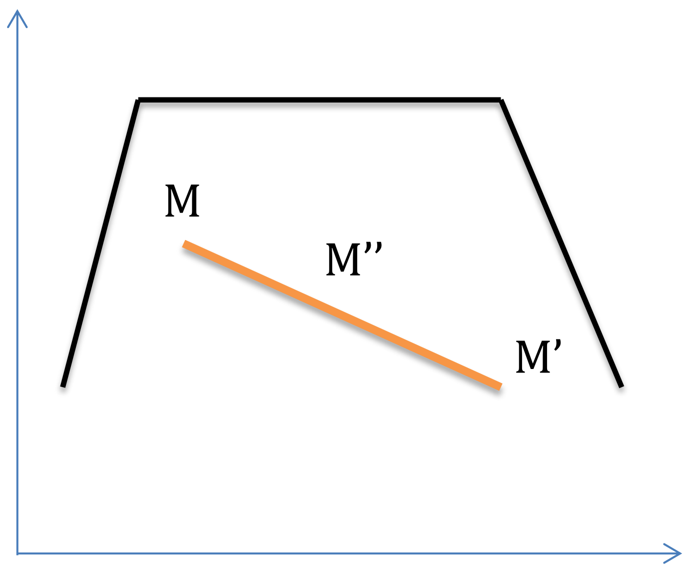
Modèle

- **Variables :** $\forall i \in [1, n],\ x_i \in R$
- **Fonction linéaire :** $z = \sum_i c_i x_i$
- **Fonction quadratique :** $z = \sum_{i,j} c_{i,j} x_i x_j$
- **Contraintes linéaires** (n variables, m inéquations) :

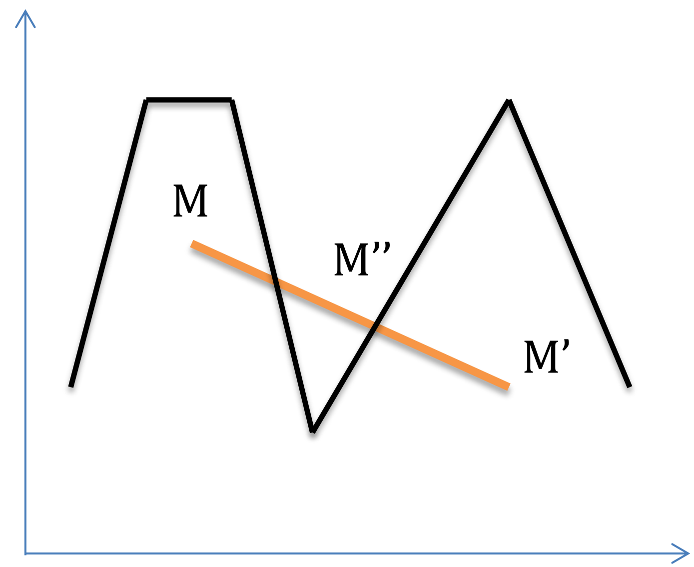
$$\forall j \in [1, m], \quad \sum_i a_{i,j} x_i \geq b_j$$
$$\forall i \in [1, n], \quad x_i \geq 0$$

Convexité

$$M'' = \alpha\, M + (1 - \alpha)\, M' \quad \text{avec} \quad \alpha \in [0, 1]$$



Domaine convexe



Domaine non convexe

Formulation algébrique

- Un programme linéaire avec n variables et m inéquations :

$$\min\left(\sum_j c_j x_j\right) \quad \text{tel que :}$$

$$\forall i, \quad \sum_j a_{i,j} x_j \geq b_i \qquad // \leq \text{ si max}$$

$$\forall j, \qquad x_j \geq 0$$

Formulation matricielle

- Un programme linéaire avec *n* variables et *m* inéquations :   min ${}^{t}C\,X$ tel que :

$$A\,X \geq B$$

$$X \geq 0$$

avec $${}^{t}C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & & \dots \\ \dots & & & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Exemple

- Formulation algébrique :

  min ($z = 2\ x_1 + 0{,}5\ x_2$) tel que :

  $$3\ x_1 - 2\ x_2 \geq 10$$
  $$x_2 \geq 5$$
  $$x_1, x_2 \geq 0$$

- Formulation matricielle :

  $$\min z = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Passage en forme canonique (1/7)

- La *forme canonique* est une maximisation et les contraintes des ≤ (sauf pour la positivité des variables).

- **Contre-exemple :**

min ($-2\,x_1 + 3\,x_2$) tel que :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 - 2\,x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Passage en forme canonique (2/7)

max ($2\,x_1 - 3\,x_2$) tel que :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 - 2\,x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Parce que $Min(Z) = -\,Max(-Z)$

Passage en forme canonique (3/7)

max ($-2\,x_1 + 3\,(x'_2 - x''_2)$) tel que :

$$\begin{cases} x_1 + (x'_2 - x''_2) = 7 \\ x_1 - 2\,(x'_2 - x''_2) \geq 4 \\ x_1 \geq 0 \quad x'_2 \geq 0 \quad x''_2 \geq 0 \end{cases}$$

Parce que $x_2 = x'_2 - x''_2$ avec $x'_2, x''_2 \in R^+$

Passage en forme canonique (4/7)

max ($-2\,x_1 + 3\,x'_2 - 3x''_2$) tel que :

$$
\begin{cases}
x_1 + x'_2 - x''_2 = 7 \\
x_1 - 2x'_2 - 2x''_2 \geq 4 \\
x_1 \geq 0 \quad x'_2 \geq 0 \quad x''_2 \geq 0
\end{cases}
$$

En enlevant les parenthèses.

Passage en forme canonique (5/7)

max ($-2\,x_1 + 3\,x'_2 - 3x''_2$) tel que :

$$\begin{cases} x_1 + x'_2 - x''_2 \leq 7 \\ x_1 + x'_2 - x''_2 \geq 7 \\ x_1 - 2x'_2 - 2x''_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0 \quad x'_2 \geq 0 \quad x''_2 \geq 0 \end{cases}$$

Parce que $a = b \Leftrightarrow a \leq b \;\; et \;\; a \geq b$

Passage en forme canonique (6/7)

max ($-2\, x_1 + 3\, x'_2 - 3x''_2$) tel que :

$$\begin{cases} x_1 + x'_2 - x''_2 \leq 7 \\ -x_1 - x'_2 + x''_2 \leq -7 \\ -x_1 + 2x'_2 + 2x''_2 \leq -4 \\ x_1 \geq 0 \quad x'_2 \geq 0 \quad x''_2 \geq 0 \end{cases}$$

Parce que $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$

Passage en forme canonique (7/7)

max ($-2\,x_1 + 3\,x_2 - 3x_3$) tel que :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 7 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \leq -7 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq -4 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Par renommage.

Exemple : énoncé

- Une usine peut fabriquer 3 produits avec des cadences respectives de 50, 25 et 75 unités/h.
- La capacité d'utilisation de la machine est de 45h.
- Les marges liées à la vente des produits sont respectivement de 4€, 12€ et 3€.
- La demande des clients est au plus de 1000, 500 et 1500 unités, respectivement.

Exemple : modélisation (1/2)

- Indices : numéro du produit $i = 1, 2, 3$ et $x_i \geq 0$
- Variables : x_i = quantité de produit i fabriqué.
- Objectif : z = max ($4\,x_1 + 12\,x_2 + 3\,x_3$)
- Contraintes : $\frac{x_1}{50} + \frac{x_2}{25} + \frac{x_3}{75} \leq 45$

  $x_1 \leq 1000$

  $x_2 \leq 500$

  $x_3 \leq 1500$

  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Exemple : modélisation (2/2)

- Programme linéaire :

max ($4\,x_1 + 12\,x_2 + 3\,x_3$) tel que

$$x_1 \leq 1000 \qquad (1)$$

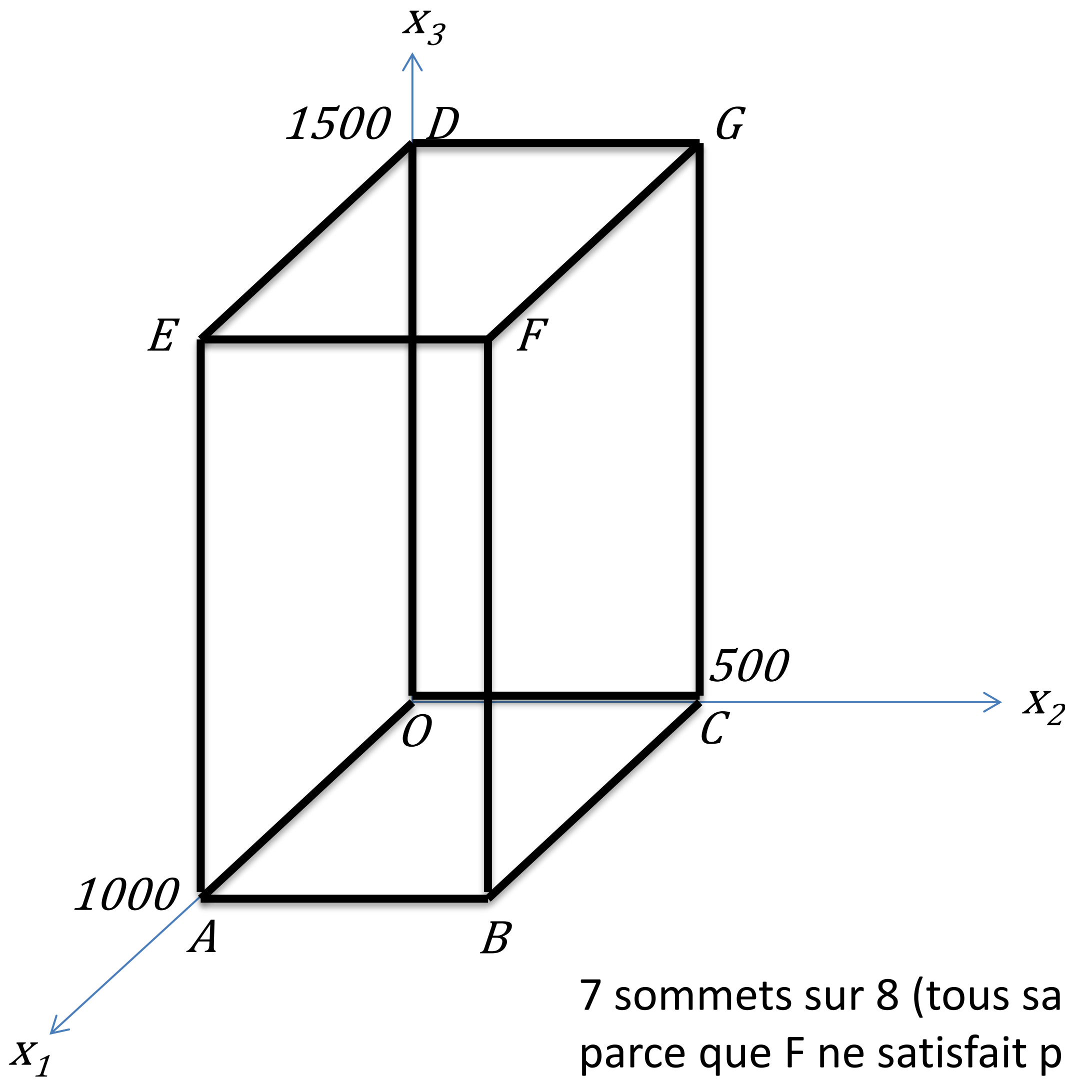
$$x_2 \leq 500 \qquad (2)$$

$$x_3 \leq 1500 \qquad (3)$$

$$3\,x_1 + 6\,x_2 + 2\,x_3 \leq 6750 \qquad (4)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

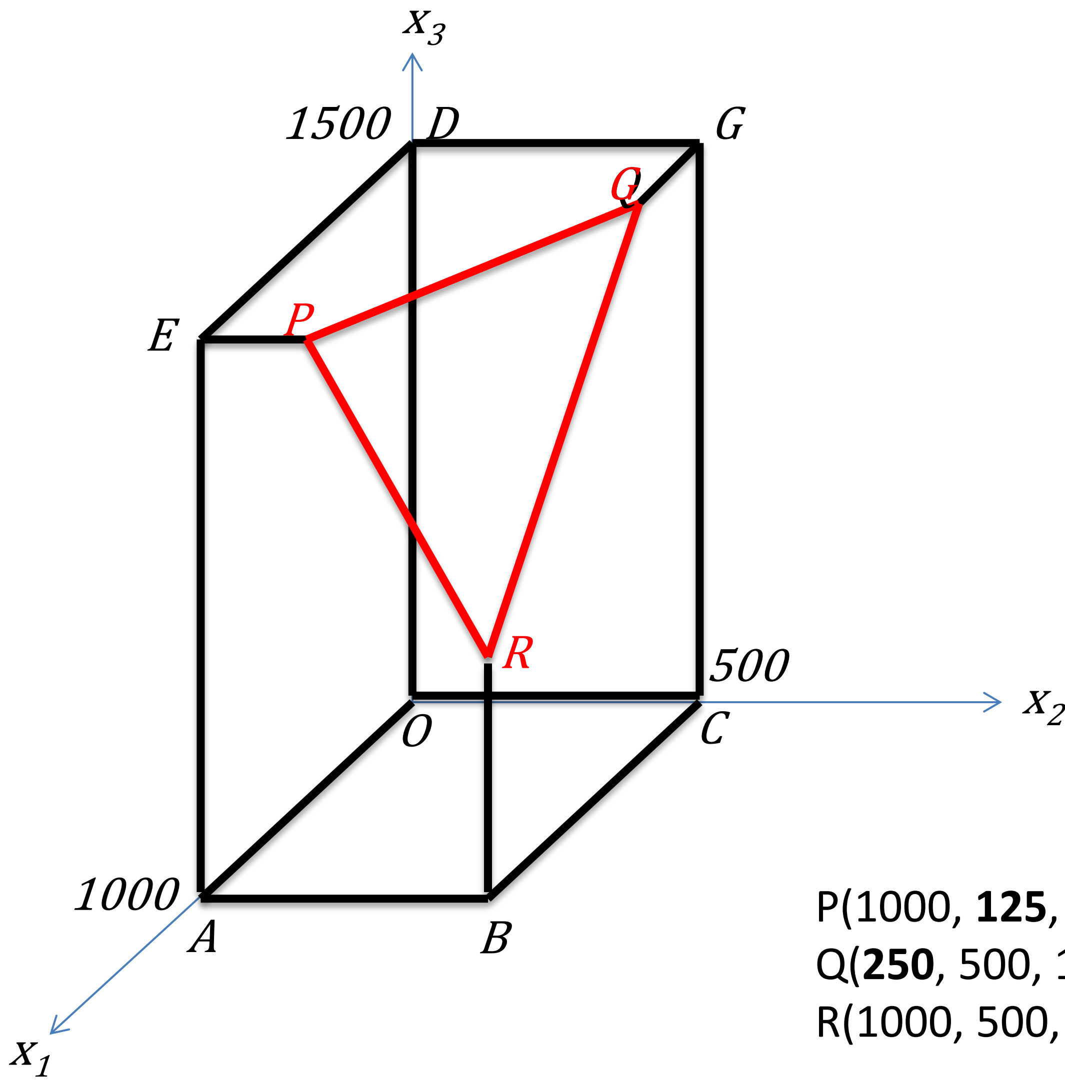
Résolution géométrique (1/2)



$z_0 = 0$
$z_A = 4000$
$z_B = 7000$
$z_C = 6000$
$z_D = 4500$
$z_E = 8500$
$z_F = 14500$
$z_G = 10500$

7 sommets sur 8 (tous sauf F) donnent une solution réalisable, parce que F ne satisfait pas la contrainte (4)
($3 \times 1000 + 6 \times 500 + 2 \times 1500 = 9000 \not\leq 6750$)

Résolution géométrique (2/2)



$z_0 = 0$
$z_A = 4000$
$z_B = 7000$
$z_C = 6000$
$z_D = 4500$
$z_E = 8500$

$z_G = 10500$

P(1000, **125**, 15000) et $z_P = 10000$
Q(**250**, 500, 1500) et $z_Q =$ **11500**
R(1000, 500, **375**) et $z_R = 10750$

Solution du problème : 250 prod. 1, 500 prod. 2, 1500 prod. 3 et marge de 11500.

Résolution algébrique (1/13)

max ($4\,x_1 + 12\,x_2 + 3\,x_3$) tel que

$$
\begin{array}{llr}
x_1 & \leq 1000 & (1) \\
x_2 & \leq 500 & (2) \\
x_3 & \leq 1500 & (3) \\
3\,x_1 + 6\,x_2 + 2\,x_3 & \leq 6750 & (4) \\
x_1, x_2, x_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

Résolution algébrique (2/13)

max ($4\,x_1 + 12\,x_2 + 3\,x_3$) tel que

$$
\begin{array}{lllllllll}
x_1 & & & + y_1 & & & & = & 1000 \\
 & x_2 & & & + y_2 & & & = & 500 \\
 & & x_3 & & & + y_3 & & = & 1500 \\
3\,x_1 + & 6\,x_2 + & 2\,x_3 & & & & + y_4 & = & 6750
\end{array}
$$

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

y_i = variables d'écart ($n + m$ variables au total).

Algorithme du simplexe (1/2)

- Récriture du problème jusqu'à ce que la solution optimale puisse être extraite de manière évidente de la formulation mathématique du problème.
- *n + m* variables alors que *m* équations :
  - Variables **en base** : toutes les variables non nulles.
  - Variables **hors base** (variables « en trop ») : toutes les variables que l'on met à 0 pour obtenir une solution.

Algorithme SIMPLEXE (A, B, C) // Local et itératif

1 TANT QUE les coefficients de *z* ne sont pas tous négatifs FAIRE
2 Choisir une variable hors base.
3 Trouver la valeur maximum que peut prendre cette variable selon les inéquations.
3 Substituer cette variable hors base, désormais variable en base, dans les équations (pivoter).

Algorithme du simplexe (2/2)

- Critères de Dantzig :
  - **Choix de la variable hors base à faire rentrer dans la base :** la variable qui fait le plus augmenter *z* (la plus payante).
  - **Choix de la valeur de cette variable hors base :** augmenter la valeur de la variable tant qu’aucune contrainte n’est violée.
  - **Choix de la variable en base à faire sortir de la base :** la variable qui s’annule en premier.

Résolution algébrique (3/13)

max ($4\,x_1 + 12\,x_2 + 3\,x_3$) tel que

$y_1 = 1000 - x_1$

$y_2 = 500 - x_2$

$y_3 = 1500 - x_3$

$y_4 = 6750 - 3\,x_1 - 6\,x_2 - 2\,x_3$

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

Le coefficient le plus fort de z est *12*, donc x_2 entre en base.

x_2 intervient dans eq. 2 et eq. 4.

500 pour eq. 2 (y_2) et *1125* pour eq. 4 (y_4), donc y_2 sort.

Donc substitution $x_2 = 500 - y_2$ selon eq. 2

Résolution algébrique (4/13)

max ($4\, x_1 + 12\, (500 - y_2) + 3\, x_3$) tel que

$y_1 = 1000 - x_1$

$x_2 = 500 - y_2$

$y_3 = 1500 - x_3$

$y_4 = 6750 - 3\, x_1 - 6\, (500 - y_2) - 2\, x_3$

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

Résolution algébrique (5/13)

max ($6000 + 4\ x_1 - 12\ y_2 + 3\ x_3$) tel que

$y_1 = 1000 - x_1$

$x_2 = 500 - y_2$

$y_3 = 1500 - x_3$

$y_4 = 3750 - 3\ x_1 + 6\ y_2 - 2\ x_3$

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

x_1, y_2, x_3 = variables hors base

y_1, x_2, y_3, y_4 = variable en base

En fixant les variables hors base à 0, $z = 6000$

Résolution algébrique (6/13)

max ($6000 + 4\ x_1 - 12\ y_2 + 3\ x_3$) tel que
$y_1 = 1000 - x_1$
$x_2 = 500 - y_2$
$y_3 = 1500 - x_3$
$y_4 = 3750 - 3\ x_1 + 6\ y_2 - 2\ x_3$
$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

Le coefficient le plus fort de z est 4, donc x_1 entre en base.
x_1 intervient dans eq. 1 et eq. 4.
1000 pour eq. 1 (y_1) et 1250 pour eq. 4 (y_4), donc y_1 sort.
Donc substitution $x_1 = 1000 – y_1$ selon eq. 1.

Résolution algébrique (7/13)

max ($6000 + 4\ (1000 - y_1) - 12\ y_2 + 3\ x_3$) tel que

$x_1 = 1000 - y_1$

$x_2 = 500 - y_2$

$y_3 = 1500 - x_3$

$y_4 = 3750 - 3\ (1000 - y_1) + 6\ y_2 - 2\ x_3$

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

Résolution algébrique (8/13)

max ($10000 - 4\,y_1 - 12\,y_2 + 3\,x_3$) tel que

$x_1 = 1000 - y_1$

$x_2 = 500 - y_2$

$y_3 = 1500 - x_3$

$y_4 = 750 + 3\,y_1 + 6\,y_2 - 2\,x_3$

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

x_1, x_2, y_3, y_4 = variables en base

y_1, y_2, x_3 = variables hors base

En fixant les variables hors base à 0, $z = 10000$

Résolution algébrique (8/13)

max ($10000 - 4\ y_1 - 12\ y_2 + 3\ x_3$) tel que

$x_1 = 1000 - y_1$

$x_2 = 500 - y_2$

$y_3 = 1500 - x_3$

$y_4 = 750 + 3\ y_1 + 6\ y_2 - 2\ x_3$

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

Le coefficient le plus fort dans z est 3, donc x_3 entre en base.

x_3 intervient dans eq. 3 et eq. 4

1500 pour eq. 3 (y_3) et *375* pour eq. 4 (y_4), donc y_4 sort.

Donc substitution $x_3 = 375 + 3/2\ y_1 + 3\ y_2 – 1/2\ y_4$ selon eq. 4.

Résolution algébrique (9/13)

max ($10000 - 4\ y_1 - 12\ y_2 + 3\ (375 + 3/2\ y_1 + 3\ y_2 - 1/2\ y_4)$) tel que

$x_1 = 1000 - y_1$

$x_2 = 500 - y_2$

$y_3 = 1500 - (375 + 3/2\ y_1 + 3\ y_2 - 1/2\ y_4)$

$x_3 = 375 + 3/2\ y_1 + 3\ y_2 - ½\ y_4$

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

Résolution algébrique (10/13)

max ($11125 + 1/2\, y_1 - 3\, y_2 - 3/2\, y_4$) tel que

$x_1 = 1000 - y_1$

$x_2 = 500 - y_2$

$y_3 = 1125 - 3/2\, y_1 - 3\, y_2 + 1/2\, y_4$

$x_3 = 375 + 3/2\, y_1 + 3\, y_2 - 1/2\, y_4$

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

x_1, x_2, y_3, x_3 = variables en base

y_1, y_2, y_4 = variables hors base

En fixant les variables hors base à 0, $z = 11125$

Résolution algébrique (11/13)

max ($11125 + 1/2\ y_1 - 3\ y_2 - 3/2\ y_4$) tel que

$x_1 = 1000 - y_1$

$x_2 = 500 - y_2$

$y_3 = 1125 - 3/2\ y_1 - 3\ y_2 + 1/2\ y_4$

$x_3 = 750 + 3\ y_1 + 6\ y_2 - y_4$

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

Le coefficient le plus fort dans z est $1/2$, donc y_1 entre en base.
y_1 intervient dans eq. 1, eq. 3 et eq. 4
1000 pour eq. 1 (x_1), *750* pour eq. 3 (y_3) et +infini pour eq. 4 (x_3), donc y_3 sort.
Donc substitution $y_1 = 2/3\ (1125 - y_3 - 3\ y_2 + 1/2\ y_4)$ selon eq. 3

$= 750 - 2/3\ y_3 - 2\ y_2 + 1/3\ y_4$

Résolution algébrique (12/13)

max ($11125 + 1/2\ (750 - 2/3\ y_3 - 2\ y_2 + 1/3\ y_4) - 3\ y_2 - 3/2\ y_4$)

tel que

$x_1 = 1000 - (750 - 2/3\ y_3 - 2\ y_2 + 1/3\ y_4)$

$x_2 = 500 - y_2$

$y_1 = 750 - 2/3\ y_3 - 2\ y_2 + 1/3\ y_4$

$2\ x_3 = 750 + 3\ (750 - 2/3\ y_3 - 2\ y_2 + 1/3\ y_4) + 6\ y_2 - y_4$

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

Résolution algébrique (13/13)

max ($11500 – 4\, y_2 – 1/3\, y_3 – 4/3\, y_4$) tel que

$x_1 = 250 + 2\, y_2 + 2/3\, y_3 - 1/3\, y_4$

$x_2 = 500 - y_2$

$y_1 = 750 – 2/3\, y_3 – 2\, y_2 + 1/3\, y_4$

$x_3 = 1500 – y_3$

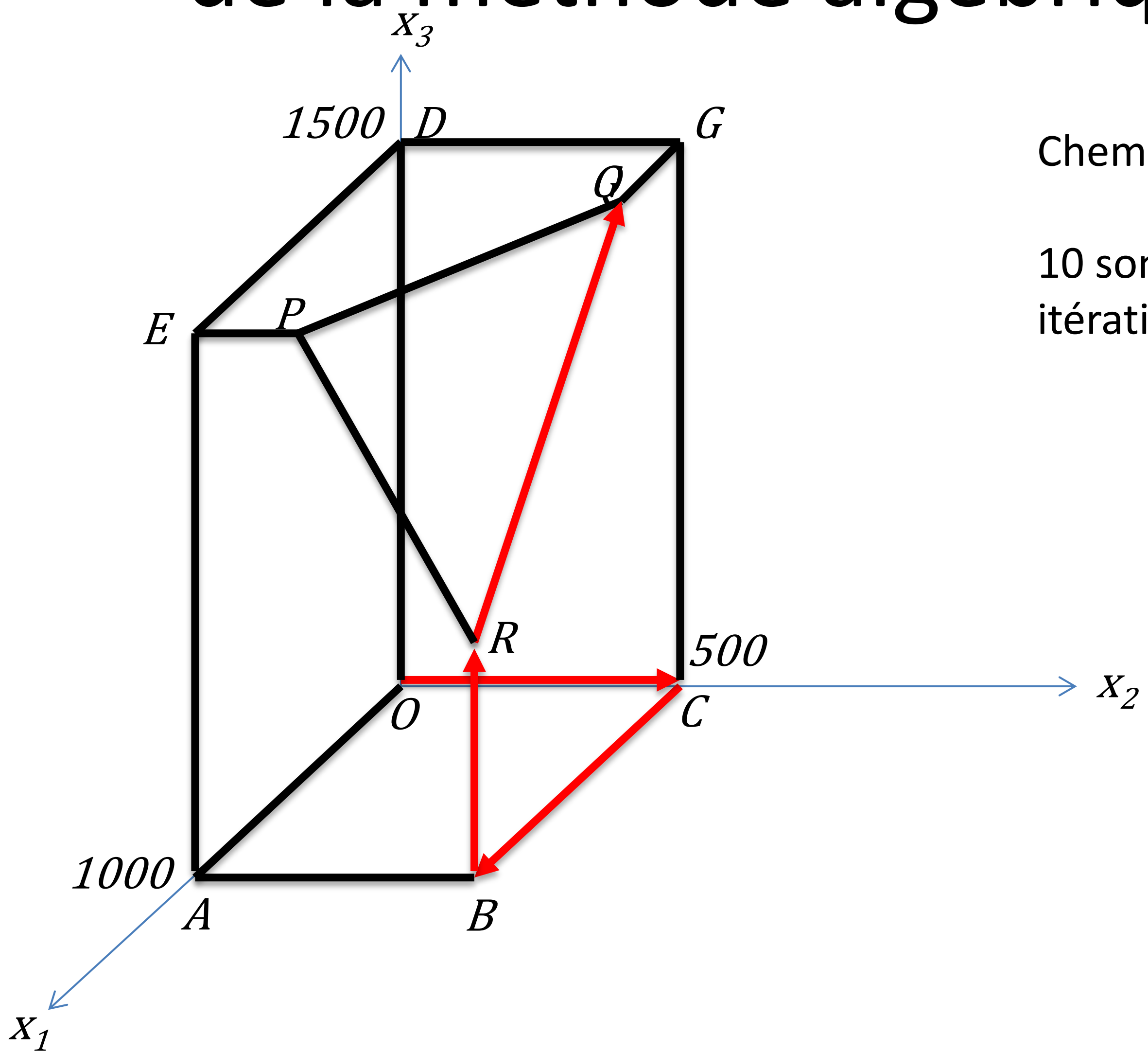
$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

Tous les coefficients de *z* sont négatifs : il n'existe pas de variable hors base qui puisse augmenter *z*. Optimum atteint.
Variables hors base à *0*, donc $y_2 = y_3 = y_4 = 0.$
Donc optimum pour $x_1 = 250$, $x_2 = 500$, $x_3 = 1500$ et $z = 11500.$

Analyse graphique de la méthode algébrique (1/2)

- **0^e itération :** variables hors base $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$:
  - Point O (0, 0, 0)
- **1^e itération :** variables hors base $(x_1, y_2, x_3) = (0, 0, 0)$ et équation sur x2 :
  - Point C (0, 500, 0)
- **2^e itération :** variables hors base $(y_1, y_2, x_3) = (0, 0, 0)$ et équations sur x2 et x1
  - Point B (1000, 500, 0)
- **3^e itération :** variables hors base $(y_1, y_2, y_4) = (0, 0, 0)$
  - Point R (1000, 500, 375)
- **4^e itération :** variables hors base $(y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 0)$ et équations sur x2, x3 et x1
  - Point Q (250, 500, 1500)

Analyse graphique de la méthode algébrique (2/2)



Chemin : O -> C -> B -> R -> Q.

10 sommets à explorer, et 4 itérations du simplexe.

Conclusion

- Un modèle en programmation linéaire se compose de *variables réelles*, d'*inéquations linéaires* et d'une *fonction linéaire* (voire quadratique) à optimiser.
- On recherche un jeu de valeurs *optimales* de ces variables.
- L'*algorithme du simplexe* est une reformulation itérative locale (par pivotage) jusqu'à obtention évidente d'une solution optimale.
- Amélioration : méthode du point intérieur.