Programmation linéaire
Heure 3
Modélisation

Philippe Morignot
pmorignot@yahoo.fr

Programmation par but (1 / 2)

- La contrainte suivante est dure :

$$\forall\, i,\ \ \sum_j a_{i,j}\, x_{\mathrm{j}} = \mathrm{b_i}$$

- Alors qu'on aimerait parfois avoir une contrainte plus souple :

$$\forall\, i,\ \ \sum_j a_{i,j}\, x_{\mathrm{j}} = \text{[si possible] } \mathrm{b_i}$$

Programmation par but (2 / 2)

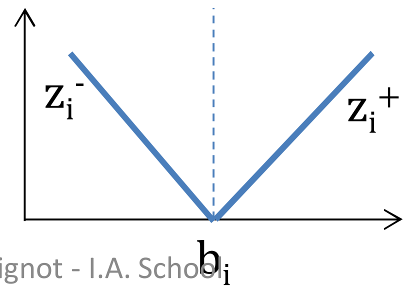
- **Variables de but :** z_i^+ et $z_i^- \geq 0$
- **Reformulation de la contrainte :**

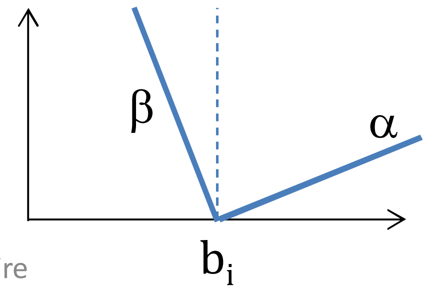
$$\forall\, i, \quad \textstyle\sum_j a_{i,j}\, x_j - b_i = z_i^+ - z_i^-$$

excédent déficit

- **Ajout à la fonction coût :** $z = \min \sum_i (z_i^+ + z_i^-)$
- **Pénalisation différente de l'excédent et du déficit :**

$$z = \min \textstyle\sum_i (\alpha z_i^+ + \beta z_i^-)$$





Variables semi-continues

- On veut modéliser : $x = 0$ ou $x \geq L$

  avec $0 \leq x \leq X_{sup}$ et $L \leq X_{sup}$

- Modèle :

  Une variable booléenne supplémentaire y

$$\begin{cases} x \geq L\,y \\ x \leq X_{sup}\,y \end{cases}$$

- Preuve : [Exercice : si $y = 0$ … ; si $y = 1$ …]

SI … ALORS …

- On veut modéliser : si $(x > 0\ )$ alors $y = 1$

  avec : $0 \leq x \leq X_{sup}$ et $y \in \{ 0 ; 1 \}$

- Modèle : $M\, y \geq x$ avec $M >> X_{sup}$

  « Big M »: un très grand nombre

- Preuve : [Exercice : si $x = 0$ …. ; si $x > 0$ …]

- Variante : modéliser : si $(x > \lambda)$ alors $y = 1$

  Poser $x' = x - \lambda$ [Exercice : …]

Disjonction

- On veut modéliser : $x_1 \neq x_2$ $(x_1 > x_2$ ou $x_1 < x_2)$
- Modèle : $y \in \{0 ; 1\}$ $\quad y = 0$ si $x_1 < x_2$

$$= 1 \text{ si } x_1 > x_2$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 > -M\,y \\ x_1 - x_2 > -M\,(1 - y) \end{cases}$$

- Preuve : [Exercice : si $y = 0$ … ; si $y = 1$ …]
- Exercices : on veut modéliser :
  - 2 trains ne doivent pas se croiser.
  - Avec en plus un intervalle de sécurité.

Valeur absolue (1/2) dans la fonction de coût

- On veut modéliser : min $|x - y|$
- Modèle : variables d'écart e^+ et $e^- \geq 0$

  Avec le terme $|x - y|$ relié à $e^+ - e^-$

  Si $|x - y| = 5$, par exemple $x - y = 5 - 0$

  Si $|x - y| = 3$, par exemple $x - y = 0 - 3$

  Une seule variable différente de 0 à la fois :

  min $(e^+ + e^-)$ tel que $x - y = e^+ - e^-$

Valeur absolue (2/2) dans les contraintes

- On veut modéliser : $| x - y | > 0$
- Equivalente à $x \neq y$ (on se ramène à une disjonction).

- On veut modéliser : $| x - y | > \lambda$
- Modèle : une variable booléenne z supplémentaire

$$\begin{cases} x - y > \lambda - M z \\ y - x > \lambda - M (1 - z) \end{cases}$$

- Preuve : [Exercice : si $z = 0$, … ; si $z = 1$, …]

Fonction objectif quadratique (1 / 3)

- Exemple : le sac à dos quadratique :

  N articles à placer dans un sac à dos.

  b : capacité maximum du sac.

  p_i : poids de l'objet *i.*

  Maximiser l'utilité du sac,

  Mais aussi : si on prend certains objets, d'autres seront plus ou moins utiles.

  $s_{i,j}$: intérêt de prendre l'objet i puis l'objet j

Fonction objectif quadratique (2/3)

- Variables : $\mathrm{x_i} = 1$ ssi l'objet i est dans le sac.
- Contraintes : $\sum_j p_j \, x_j \leq \mathrm{b}$
- Fonction objectif : max ($\sum_i p_i \, xi + \sum_{i,j} s_{i,j} \, xi \, x_j$)

  Mais produit de 2 variables, terme non linéaire !
- Modèle : Soit $\mathrm{w_{i,j}} = \mathrm{x_i \, x_j}$ avec $\mathrm{w_{i,j}} = \mathrm{w_{j,i}}$

  On veut modéliser : $\mathrm{w_{i,j}} = 1$ *ssi* $\mathrm{x_i} = 1$ *et* $\mathrm{x_j} = 1$

  $$\begin{cases} \forall\, i, \quad \mathrm{w_{i,j}} \leq \mathrm{x_i} \\ \forall\, j, \quad \mathrm{w_{i,j}} \leq \mathrm{x_j} \end{cases}$$
- Fonction objectif : max ($\sum_i p_i \, x_\mathrm{i} + \sum_{i,j} s_{i,j} \, w_{i,j}$)
- *n(n – 1)/2* variables et *n (n – 1)* contraintes.

Fonction objectif quadratique (3/3)

- Autre solution :

  $\max\left(\sum_i p_i\, x_\mathrm{i} + \sum_{i,j} s_{i,j}\, xi\, x_j \right)$

  $= \max\left(\sum_i p_i\, xi + \sum_i \left[\sum_j s_{i,j}\, xi\, xj \right]\right)$

  $= \max\left(\sum_i p_i\, xi + \sum_i \left[xi \sum_j s_{i,j}\, xj \right]\right)$

  $= \max\left(\sum_i p_i\, xi + \sum_i z_i \right)$ avec $\mathrm{z_i} = xi \sum_j s_{i,j}\, xj \geq 0$

- Contraintes :

$$\begin{cases} \forall\, i, \quad z_i \leq x_i \sum_j s_{i,j} = M\, x_\mathrm{i} & (1) \\ \forall\, i, \quad z_i \leq \sum_j s_{i,j}\, x_\mathrm{j} & (2) \end{cases}$$

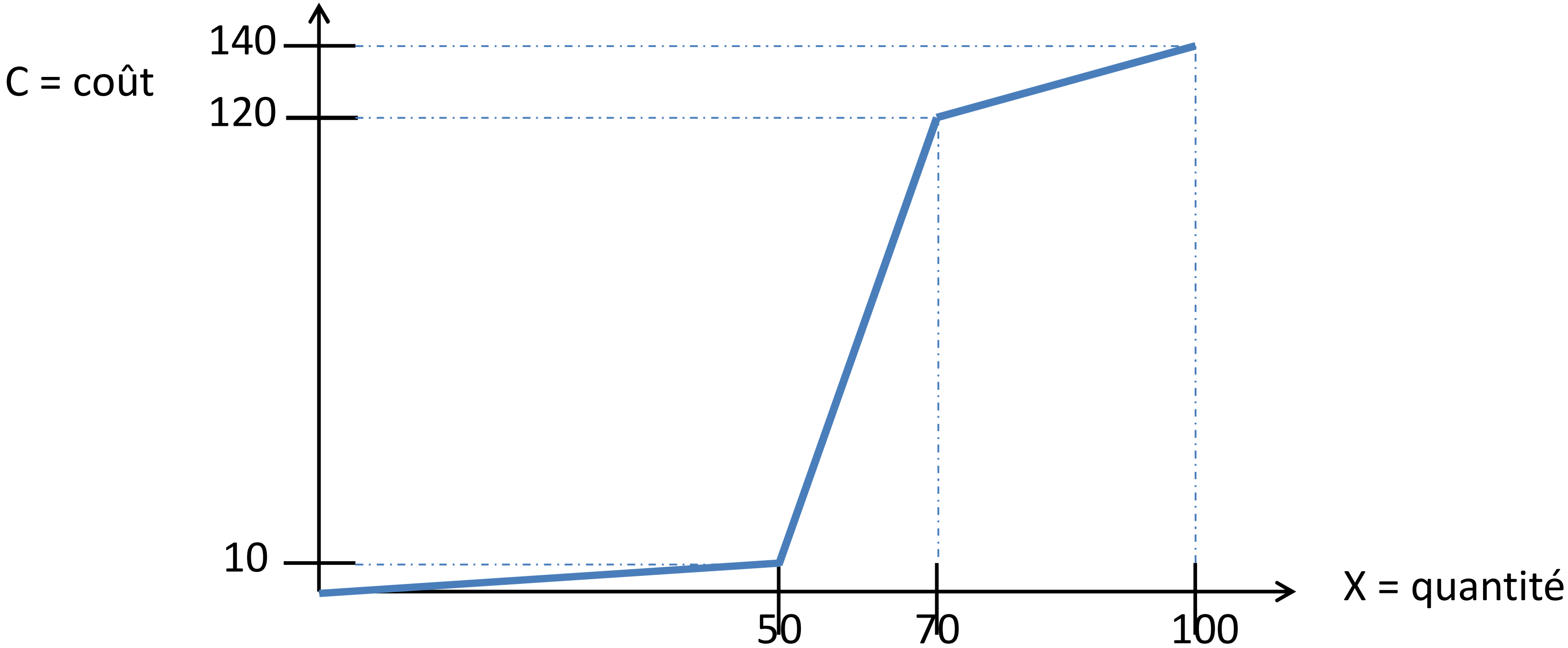
- Preuve :

  si $\mathrm{x_i} = 0$, alors $\mathrm{z_i} \leq 0$ selon (1), alors $\mathrm{z_i} = 0$

  si $\mathrm{x_i} = 1$, alors $\mathrm{z_i}$ non contraint selon (1)

  et égalité en pratique selon (2) car maximisation.

Fonction linéaire par morceaux (1/3)



- Minimiser un coût sachant que les tarifs sont linéaires par morceaux, et non simplement linéaires.
- Ajouter trois variables de décision x_1, x_2, x_3

  Mais fonction de coût ? Contraintes ?

Fonction linéaire par morceaux (2/3)

- Fonction de coût :

$$z = \min \left(\frac{10-0}{50-0}\,x_1 + \frac{120-10}{70-50}\,x_2 + \frac{140-120}{100-70}\,x_3 \right)$$

$$= \min \left(\frac{1}{5}\,x_1 + \frac{11}{2}\,x_2 + \frac{2}{3}\,x_3 \right)$$

avec :

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 50 \\ 0 \leq x_2 \leq 20 \\ 0 \leq x_3 \leq 30 \end{cases}$$

Fonction linéaire par morceaux (3/3)

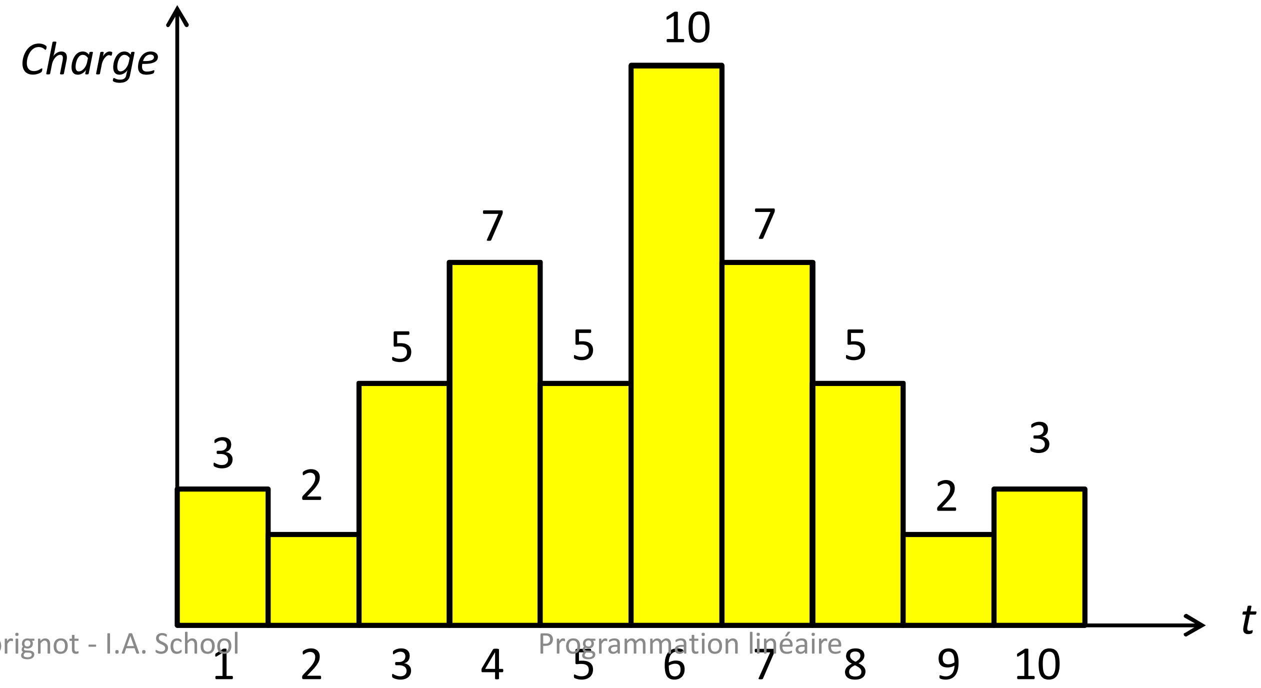
- Mais il faut modéliser le fait qu'avant de pouvoir produire des x_3, il faut produire 20 x_2, et qu'avant de pouvoir produire des x_2, il faut produire 50 x_1 …
- Modèle : pour chaque morceau, variable booléenne $\mathrm{y}_2 = 1$ dès que tous les x_1 ont été utilisés, et qu'on se sert des x_2.

$$\begin{cases} \mathrm{y}_2\, 50 \leq \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \leq \mathrm{M}\, \mathrm{y}_2 \end{cases}$$

- Preuve : [Exercice : si $\mathrm{y}_2 = 0$ … ; si $\mathrm{y}_2 = 1$ …]

Couverture de charge (1/4)

- Problème de construction d'horaires : On a des charges à couvrir, par pas de temps *t*. On veut couvrir ces charges en affectant des agents sur ces pas de temps. Chaque agent peut travailler 8h non stop.



Couverture de charge (2/4)

- Définir les différents horaires (vacations) possibles de travail : $V_1 = [\ 0h\ ;\ 8h\ [$ $V_2 = [\ 1h\ ;\ 9h\ [$ …
- **Indices :** t = pas de temps ; j = indice de la vacation.
- **Variables :** x_j = nombre d'agents affectés à la vacation j.
- **Données :**
  - b_t : charge à couvrir sur le pas de temps t
  - $a_{j,t} = 1$ ssi la vacation j couvre le pas de temps t
- **Contraintes :** $\forall\, t,\ \sum_j a_{j,t}\, x_j \geq b_t$
- **Fonction de coût :** $min \sum_j x_j$

Mais il y aura probablement des excédents de charge!

Couverture de charge (3/4)

- On veut maintenant représenter les excédents et les déficits : programmation par but.
- **Variables supplémentaires :**

  $z^+_t \geq 0$: excédent d'agents sur le pas de temps t

  $z^-_t \geq 0$: déficit d'agents sur le pas de temps t
- **Contraintes :** $\forall\, t,\ \sum_j a_{j,t}\, x_j - b_t = z^+_t - z^-_t$
- **Fonction de coût :** $min(\sum_t \alpha z_t^+ + \beta z_t^-)$

  avec $\beta >> \alpha$ pour ne pas avoir trop de déficit

  Mais il y aura sans doute encore du déficit !

Couverture de charge (4/4)

- On ne veut plus maintenant que de l'excédent, et lisser leur répartition.
- **Variables :**

  e_t : excédent sur le pas de temps t

  e_{moyen} : excédent moyen sur tous les pas de temps

  e_t^+ : excédent au dessus de la moyenne sur le pas de temps t

  e_t^- : excédent au dessous de la moyenne sur le pas de temps t
- **Contraintes :**

  $\forall\, t,\ \ \sum_j a_{j,t}\, x_j - b_t = e_t$ // Couverture de la charge

  $\forall\, t,\ \ e_t = e_{moyen} + e_t^+ - e_t^-$ // Définition de e_t

  $e_{moyen} = (\sum_t e_t\,)\ /\ T$ // Définition de e_{moyen}
- **Fonction de coût :** $min\left(\sum_j x_j + \sum_t (\alpha e_t^+ + \beta e_t^-)\right)$ avec $\alpha, \beta > 1$

  Minimisation du nombre d'agents et, à solution égale, lissage de la charge.

Conclusion

- Modèles pour encoder en un programme linéaire des choses qui ne le sont pas :
  - Programmation par but
  - Variables semi-continues
  - SI … ALORS …
  - Disjonction
  - Valeur absolue en fonction objectif et en contrainte
  - Fonction objectif quadratique
  - Fonction objectif linéaire par morceaux
- Problème de la couverture de charge avec deux variantes (excédents et déficits, sans déficit).