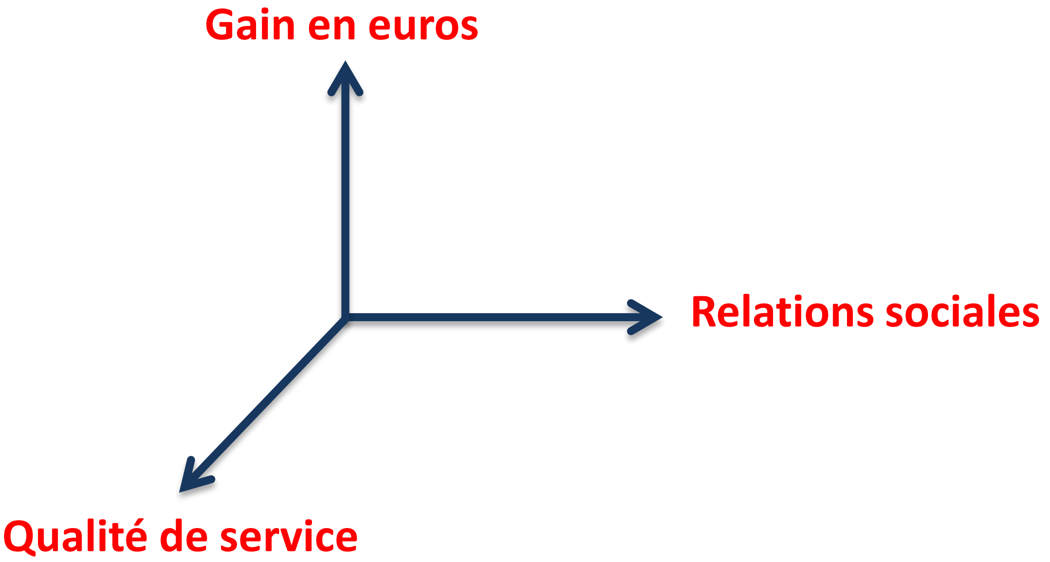
Programmation linéaire
Heure 4
Optimisation multicritère et dualité

Philippe Morignot, Adrien Pain
pmorignot@yahoo.fr

OPTIMISATION MULTICRITÈRE

Introduction

- Dans un problème de planification des ressources humaines, on veut maximiser le gain en euros, la qualité de service et les relations sociales.



- Interdépendance des critères : comment trouver la solution optimale ? Et que veut dire « optimale » ?

Formulation

Programme linéaire monocritère :

min ($\sum_j c_j x_j$)

tel que :

$$\forall i, \quad \sum_j a_{i,j} x_j \geq b_i$$

$$\forall j, \quad x_j \geq 0$$

Programme linéaire multicritère :

$\forall k$, min ($F_k = \sum_j c_{j,k} x_j$)

tel que :

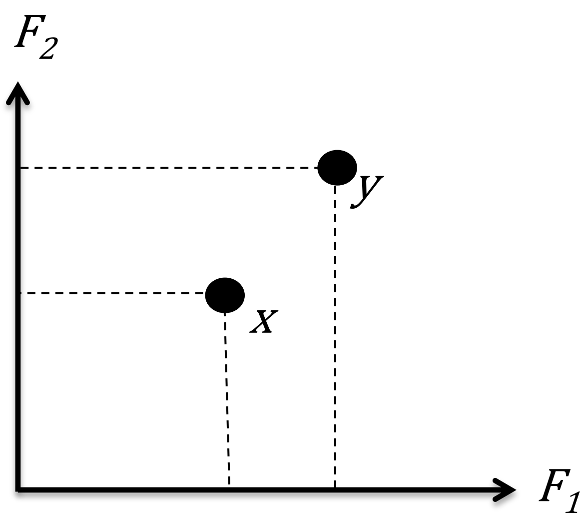
$$\forall i, \quad \sum_j a_{i,j} x_j \geq b_i$$

$$\forall j, \quad x_j \geq 0$$

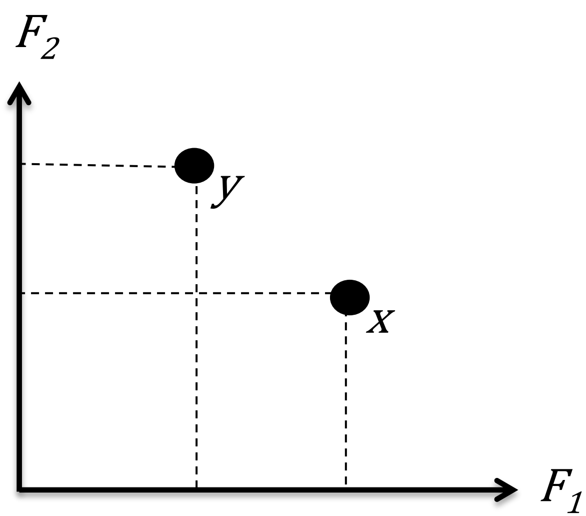
Définition (1/2)

- Pour un programme linéaire de minimisation, la solution x domine la solution y ssi

$$\forall k,\ F_k(x) \leq F_k(y)$$

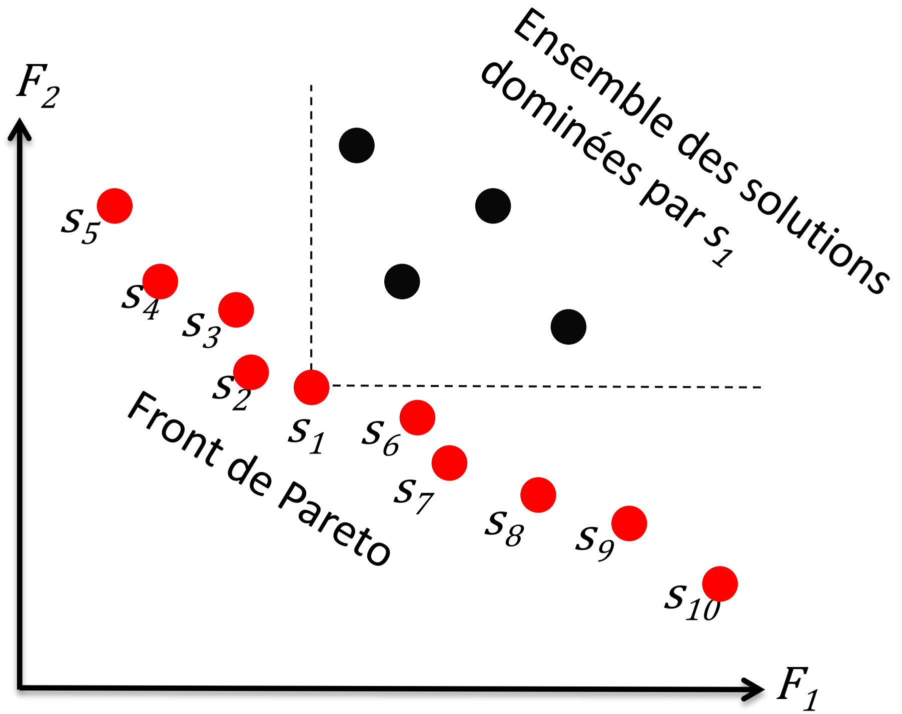


x domine y



x ne domine pas y

Définition (2/2)



- Le **front de Pareto** est l'ensemble des solutions dominantes (ou efficaces) du problème.
- Comment les départager ?

Méthodes de départage (1/3) Agrégation des critères

- Une nouvelle fonction de coût *F* est la combinaison linéaire des critères F_i :

$$min\, F(x) \quad \text{avec} \quad F(x) = \sum_i pi\, Fi(x)$$

et résolution monocritère avec *F*.

- <u>Avantage :</u> simple.
- <u>Désavantages :</u> on n'atteint pas forcément un optimum. Et comment choisir les coefficients p_i ?

Méthodes de départage (2/3) Sérialisation

- Algorithme : (1) fixer un ordre sur les critères, et (2) les résoudre un à un dans cet ordre.
- Hypothèse (programme linéaire non compensatoire) : la qualité du critère k ne peut pas être dévalorisée par le critère $k+1$.

- Avantages : efficacité ; décompose le problème en sous-problèmes.
- Désavantages : K programmes linéaires à résoudre ; la solution optimale obtenue varie suivant l'ordre.

Méthodes de départage (3/3)
Tableau des gains

1. Maximiser séparément chacun des K critères F_k :

Critère	Solution 1	Solution 2	…	Solution K
F_1	$\mathbf{F_{1,1}}$	$F_{1,2}$	…	$F_{1,K}$
F_2	$F_{2,1}$	$\mathbf{F_{2,2}}$	…	$F_{2,K}$
…	…	…	…	…
F_K	$F_{K,1}$	$F_{K,2}$	…	$\mathbf{F_{K,K}}$

Le point idéal ($F_{1,1}$, $F_{2,2}$, … , $F_{K,K}$) est inaccessible parce que tous les critères $F_{i,i}$ ne peuvent probablement pas être atteints simultanément.

2. Minimiser l'écart maximum à ce point idéal :

$min\ \lambda$ tel que : // $\lambda \in [0,1]$

$$\begin{cases} \forall k, & F_k = \sum c_{j,k} x_j & \text{// Les K fonctions objectifs.} \\ \forall i, & x_i \geq 0 & \\ \forall k, & F_{kk} - F_k \leq \lambda \left(F_{kk} - min_i \left(F_{k,i}\right)\right) & \text{// En normant les critères } F_{i,j} \end{cases}$$

DUALITÉ

Définitions (1/2)

- Pour un programme linéaire $\min f(x)$ tel que $x \in X$, on a $f(x_{opt})$ pour un certain $x_{opt} \in X$.

  Que se passe t il si on modifie légèrement les données d'entrée ?
- Une contrainte est dite **saturée** ssi sa variable d'écart est nulle.
- La **valeur duale** associée à une contrainte est la quantité dont varie la fonction de coût / objectif quand on fait varier d'une unité la valeur du second membre.

Définitions (2/2)

Programme primal :

min $C\,X$ tel que

$$A\,X \geq B$$

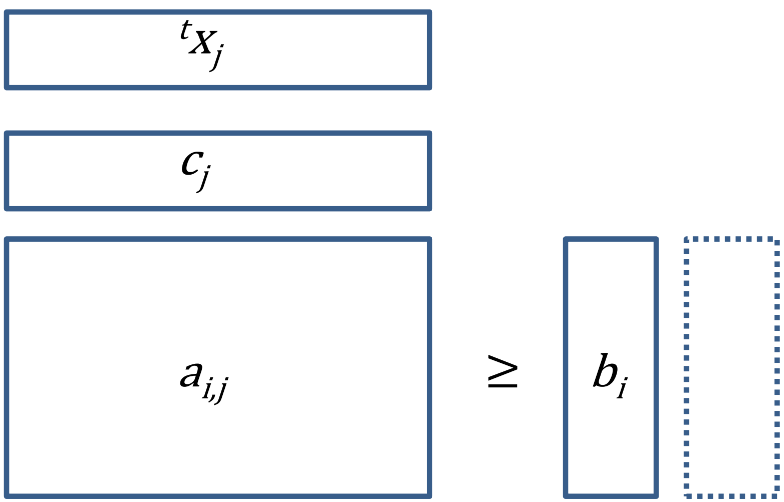
$$X \geq 0$$

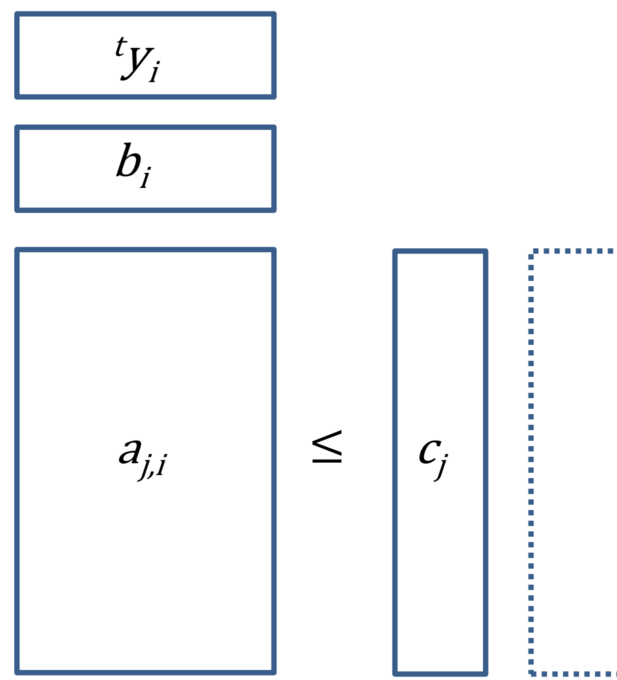
Programme dual :

max ${}^tB\,Y$ tel que

$${}^tA\,Y \leq {}^tC$$

$$Y \geq 0$$





Propriétés

Le problème dual du problème dual est le problème primal.

Programme primal	***Programme dual***
Programme sans solution	Programme non borné
Programme non borné	Programme sans solution
Programme optimum	Programme optimum
Coût opt. primal = coût opt. dual	Coût opt. dual = coût opt. primal
Contrainte *i* saturée	$y_i \geq 0$
Contrainte *i* non saturée	$y_i = 0$
$x_j \geq 0$	Contrainte *j* saturée
$x_j = 0$	Contrainte *j* non saturée

Démonstrations dans le cours IFT2505 de Jacques Ferland.

Conséquences

- Ligne 4 : si on cherche la valeur optimale de la fonction de coût / objectif, résoudre le programme linéaire primal est équivalent à résoudre le programme linéaire dual.
- Pour un programme linéaire primal, l'algorithme du simplexe donne à l'optimum les valeurs des variables duales.
  - Inutile de résoudre le programme linéaire dual pour connaître les variables duales à l'optimum.
  - Si le programme dual est plus facile à résoudre que le programme primal, le résoudre et prendre ses variables duales.
- Modifier une contrainte b_i dans le programme linéaire primal est équivalent à modifier un coût b_i dans la fonction de coût / objectif du programme linéaire dual.
  - Modifier une contrainte peut rendre le programme linéaire primal sans solution (non réalisable), alors que changer un coût est simple.

Exemple (1 / 2)

On a 3h sur une machine 1 et 5h sur une machine 2. Pour produire 1 tonne de produit A, il faut 2h sur la machine 1 et 1h sur la machine 2. Pour produire 1 tonne de produit B, il faut 1h sur la machine 1 et 2h sur la machine 2. Le produit A se vend 600€/tonne et le produit B 700 €/tonne. Quelle est la production optimale ?

Programme primal :

$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + 2y \leq 5 \end{cases}$$

$$max(6x + 7y)$$

Programme dual :

$$\begin{cases} 2u + v \geq 6 \\ u + 2v \geq 7 \end{cases}$$

$$min(3u + 5v)$$

Exemple (2 / 2)

$$\begin{cases} 2x + \ \ y \leq 3 \\ \ \ x + 2y \leq 5 \end{cases}$$
$$max(6x + 7y)$$

$$\begin{cases} 2u + \ \ v \geq 6 \\ \ \ u + 2v \geq 7 \end{cases}$$
$$min(3u + 5v)$$

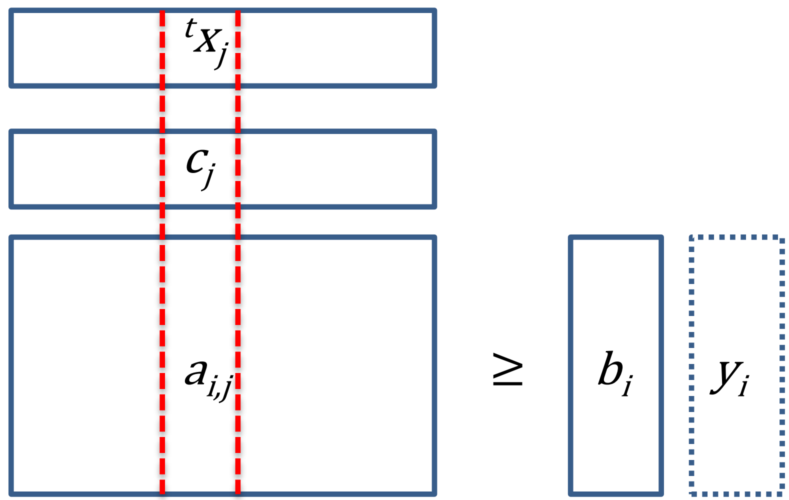
- u et v sont les coûts horaires de non-exploitation, parce que $3u+5v$ est une quantité qui à l'optimum vaut l'optimum du primal et qui est exprimée en € (puisque 6 et 7 sont des €) et parce que 3 et 5 sont les disponibilités (en heures) des machines.
- $2u+v \geq 6$ signifie que ne pas utiliser la machine 1 pendant 2h et la machine 2 pendant 1h coûte au moins 600€, puisque sinon on pourrait produire 1 tonne de produit A. Idem avec $u + 2v$ pour la machine 2.
- $(u, v)_{opt} = (5/3, 8/3)$ Chaque heure inutilisée de la machine 1 coûte 166,7€ et 267€ pour la machine 2.
- Le programme dual mesure l'impact de la mauvaise utilisation des ressources.

GÉNÉRATION DE COLONNES

Définition

- Le coût réduit Δ_j d'une variable x_j est : $\Delta_j = c_j - \sum_i a_{i,j}\, y_i$

  Apport Pertes



- Dans un programme linéaire primal (avec maximisation) :
  - Dans l'algorithme du simplexe, si $\Delta_j > 0$, alors la variable x_j entre en base.
  - Le critère d'arrêt de l'algorithme du simplexe est : $\forall j,\ \Delta_j \leq 0$

Principe

- Décomposer le problème en un problème maître et un problème esclave.
- Au début, le problème maître ne contient aucune variable (il est le plus simple possible) et utilise la programmation par but (pour qu'il y ait toujours une solution).
- 1 variable de décision = 1 colonne.
- Utilité : quand le nombre de variables est grand et que beaucoup de variables sont nulles.

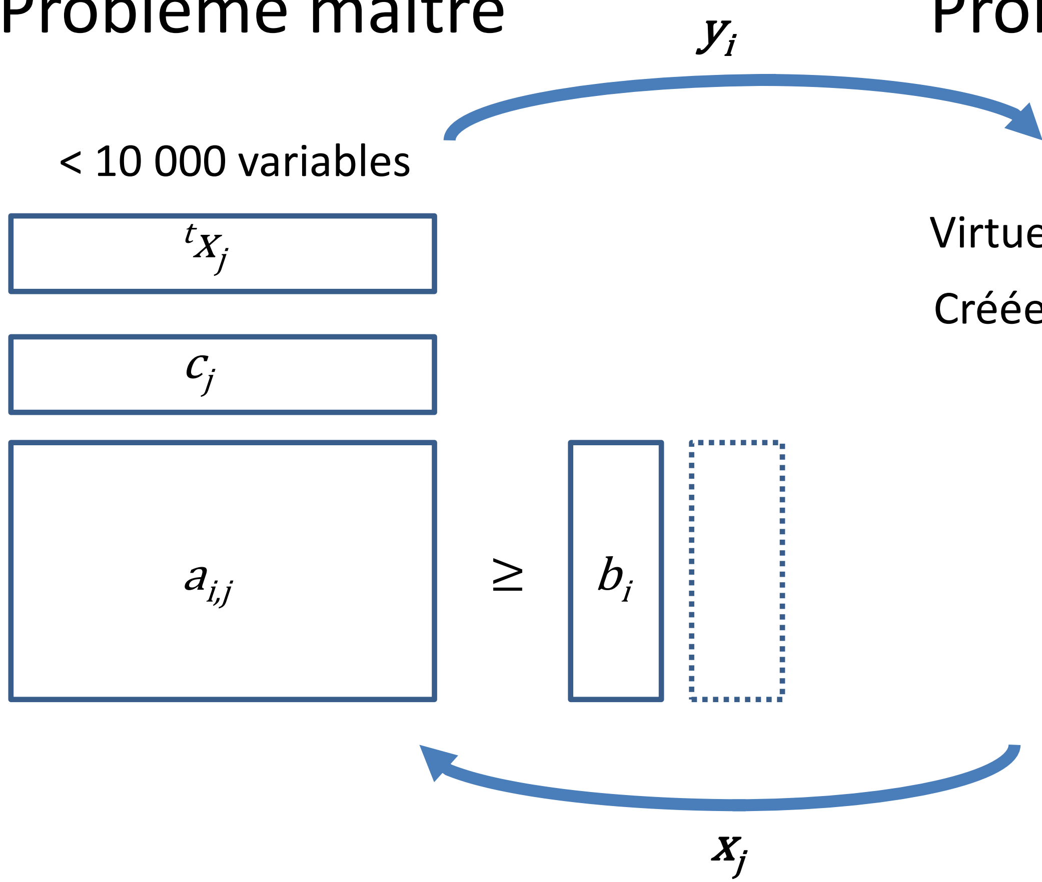
Algorithme (1/2)

1. Résoudre le programme linéaire maître.
2. TANT QUE $\exists\ j,\ \Delta_j \leq 0$, FAIRE reporter les variables duales y_i à l'optimum dans le problème esclave :
    - Si une variable duale y_i est nulle, la contrainte i peut être améliorée.
    - Si une variable duale y_i est positive, la contrainte i est saturée.
3. Résoudre le problème esclave.
4. Reporter les solutions du problème esclave dans le problème maître.

Algorithme (2/2)

Problème maître

Problème esclave



Virtuellement > 10 000 variables.

Créées à la demande.

Tant que $\exists\, j,\ \Delta_j < 0$

En variables entières (1 / 2)

- Comment résoudre un grand programme linéaire en variables entières ?
- 1^{e} idée : branch & bound avec génération de colonnes sur chaque nœud pour trouver la solution relâchée.
- Désavantage :
  - À chaque nœud du B&B, un grand nombre d'algorithmes du simplexe doivent être lancés.
  - Beaucoup trop long en général, car le nombre de variables est grand.

En variables entières (2 / 2)

- Algorithme de **branch & cut** :
  - Comme l'algorithme de branch & bound mais, dans un nœud, ne développer qu'un seul nœud-fils, et non considérer les 2 nœuds-fils possibles.
  - A chaque nœud, choisir la variable la plus proche d'une valeur entière et la fixer à cette valeur.
- Algorithme plus rapide que la génération de colonnes en variables entières, mais solution sous-optimale.

Conclusion

- Dans un programme linéaire multicritère, la dominance et le front de Pareto permettent de représenter les solutions efficaces du problème. Trouver un compromis par agrégation, sérialisation et tableau des gains.
- Les variables duales permettent de détecter quand une contrainte ne peut plus être améliorée.
- Pour un programme linéaire contenant beaucoup de variables, le séparer en un problème maître et un problème esclave et itérer (plus efficace qu'avec un algorithme du simplexe).