

Programmation linéaire

Heure 3

Modélisation

Philippe Morignot, Adrien Pain
pmorignot@yahoo.fr

Programmation par but (1 / 2)

- La contrainte suivante est dure :

$$\forall i, \sum_j a_{i,j} x_j = b_i$$

- Alors qu'on aimerait parfois avoir une contrainte plus souple :

$$\forall i, \sum_j a_{i,j} x_j = [\text{si possible}] b_i$$

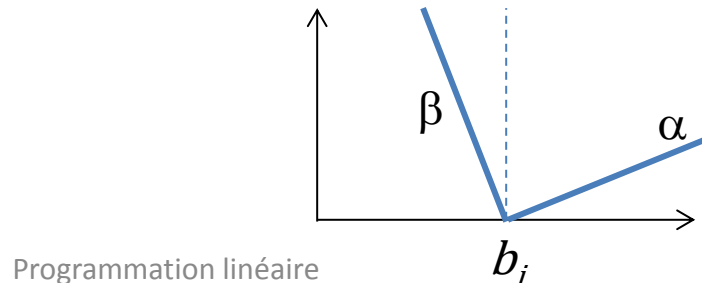
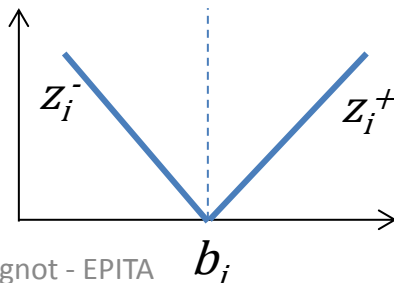
Programmation par but (2 / 2)

- Variables de but : z_i^+ et $z_i^- \geq 0$
- Reformulation de la contrainte :

$$\forall i, \quad \sum_j a_{i,j} x_j - b_i = \underbrace{z_i^+}_{\text{excédent}} - \underbrace{z_i^-}_{\text{déficit}}$$

- Ajout à la fonction coût : $z = \min \sum_i (z_i^+ + z_i^-)$
- Pénalisation différente de l'excédent et du déficit :

$$z = \min \sum_i (\alpha z_i^+ + \beta z_i^-)$$



Variables semi-continues

- On veut modéliser : $x = 0$ ou $x \geq L$
avec $0 \leq x \leq X_{sup}$ et $L \leq X_{sup}$
- Modèle :
Une variable booléenne supplémentaire y
$$\begin{cases} x \geq L y \\ x \leq X_{sup} y \end{cases}$$
- Preuve : [Exercice : si $y = 0 \dots$; si $y = 1 \dots$]

SI ... ALORS ...

- On veut modéliser : si $(x > 0)$ alors $y = 1$
avec : $0 \leq x \leq X_{sup}$ et $y \in \{0 ; 1\}$
- Modèle : $My \geq x$ avec $M \gg X_{sup}$
« Big M »: un très grand nombre
- Preuve : [Exercice : si $x = 0$; si $x > 0$...]
- Variante : modéliser : si $(x > \lambda)$ alors $y = 1$
Poser $x' = x - \lambda$ [Exercice : ...]

Disjonction

- On veut modéliser : $x_1 \neq x_2$ ($x_1 > x_2$ **ou** $x_1 < x_2$)
- Modèle :
$$y \in \{0; 1\} \quad \begin{aligned} y &= 0 \text{ si } x_1 < x_2 \\ &= 1 \text{ si } x_1 > x_2 \end{aligned}$$
- $$\begin{cases} x_2 - x_1 > -My \\ x_1 - x_2 > -M(1 - y) \end{cases}$$
- Preuve : [Exercice : si $y = 0 \dots$; si $y = 1 \dots$]
- Exercices : on veut modéliser :
 - 2 trains ne doivent pas se croiser.
 - Avec en plus un intervalle de sécurité.

Valeur absolue (1/2)

dans la fonction de coût

- On veut modéliser : $\min |x - y|$
- Modèle : variables d'écart e^+ et $e^- \geq 0$

Avec le terme $|x - y|$ relié à $e^+ - e^-$

Si $|x - y| = 5$, par exemple $x - y = 5 - 0$

Si $|x - y| = 3$, par exemple $x - y = 0 - 3$

Une seule variable différente de 0 à la fois :

$\min (e^+ + e^-)$ tel que $x - y = e^+ - e^-$

Valeur absolue (2/2) dans les contraintes

- On veut modéliser : $|x - y| > 0$
- Equivalente à $x \neq y$ (on se ramène à une disjonction).

- On veut modéliser : $|x - y| > \lambda$
- Modèle : une variable booléenne z supplémentaire

$$\begin{cases} x - y > \lambda - Mz \\ y - x > \lambda - M(1 - z) \end{cases}$$

- Preuve : [Exercice : si $z = 0, \dots$; si $z = 1, \dots$]

Fonction objectif quadratique (1 / 3)

- Exemple : le sac à dos quadratique :

N objets à placer dans un sac à dos.

b : capacité maximum du sac.

p_i : poids de l'objet i .

Maximiser l'utilité du sac,

Mais aussi : si on prend certains objets,
d'autres seront plus ou moins utiles.

$s_{i,j}$: intérêt de prendre l'objet i puis l'objet j

Fonction objectif quadratique (2/3)

- Variables : $x_i = 1$ ssi l'objet i est dans le sac.
- Contraintes : $\sum_j p_j x_j \leq b$
- Fonction objectif : $\max (\sum_i p_i x_i + \sum_{i,j} s_{i,j} x_i x_j)$
 Mais produit de 2 variables, terme non linéaire !
- Modèle : Soit $w_{i,j} = x_i x_j$ avec $w_{i,j} = w_{j,i}$
 On veut modéliser : $w_{i,j} = 1$ ssi $x_i = 1$ et $x_j = 1$

$$\begin{cases} \forall i, & w_{i,j} \leq x_i \\ \forall j, & w_{i,j} \leq x_j \end{cases}$$
- Fonction objectif : $\max (\sum_i p_i x_i + \sum_{i,j} s_{i,j} w_{i,j})$
- $n(n-1)/2$ variables et $n(n-1)$ contraintes.

Fonction objectif quadratique (3/3)

- Autre solution :

$$\begin{aligned}
 & \max (\sum_i p_i x_i + \sum_{i,j} s_{i,j} x_i x_j) \\
 = & \max (\sum_i p_i x_i + \sum_i [\sum_j s_{i,j} x_i x_j]) \\
 = & \max (\sum_i p_i x_i + \sum_i [x_i \sum_j s_{i,j} x_j]) \\
 = & \max (\sum_i p_i x_i + \sum_i z_i) \quad \text{avec } z_i = x_i \sum_j s_{i,j} x_j \geq 0
 \end{aligned}$$

- Contraintes :

$$\begin{cases} \forall i, & z_i \leq x_i \sum_j s_{i,j} = M x_i & (1) \\ \forall i, & z_i \leq \sum_j s_{i,j} x_j & (2) \end{cases}$$

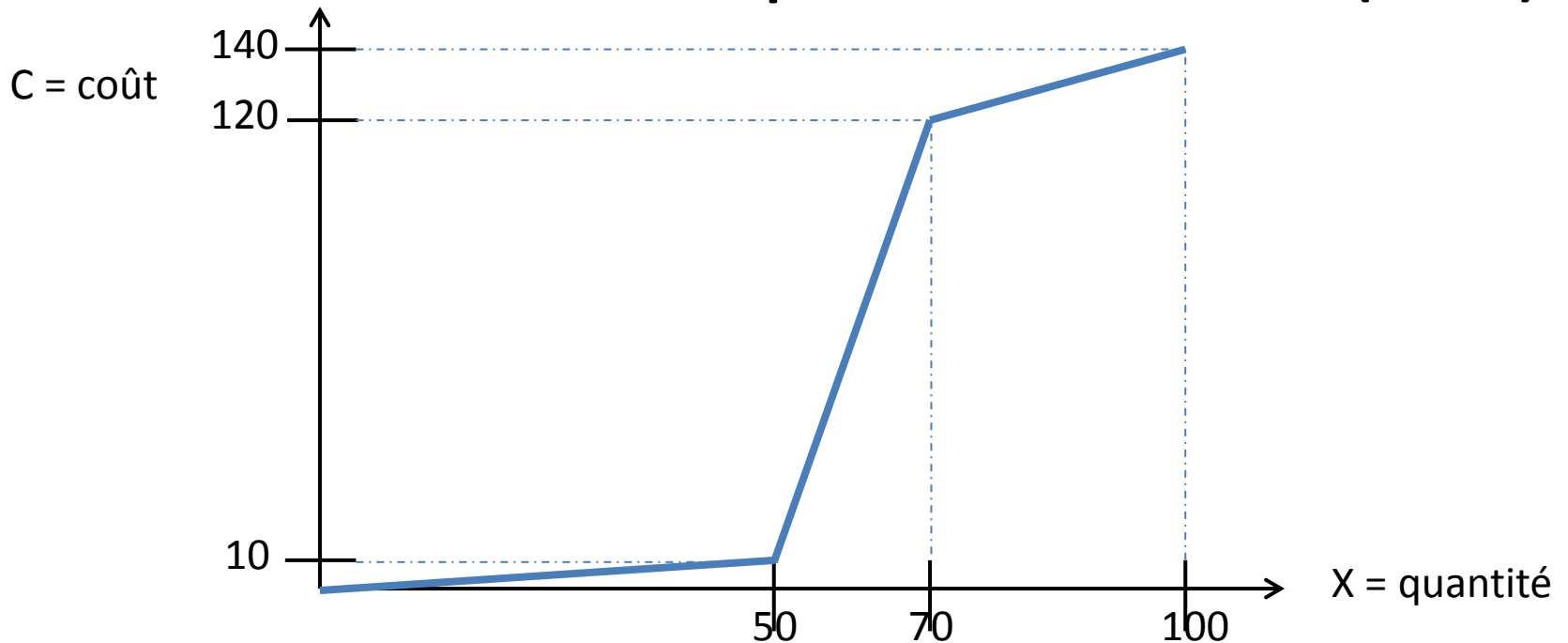
- Preuve :

si $x_i = 0$, alors $z_i \leq 0$ selon (1), alors $z_i = 0$

si $x_i = 1$, alors z_i non contraint selon (1)

et égalité en pratique selon (2) car maximisation.

Fonction linéaire par morceaux (1/3)



- Minimiser un coût sachant que les tarifs sont linéaires par morceaux, et non simplement linéaires.
- Ajouter trois variables de décision x_1 , x_2 , x_3
Mais fonction de coût ? Contraintes ?

Fonction linéaire par morceaux (2/3)

- Fonction de coût :

$$\begin{aligned} z &= \min \left(\frac{10 - 0}{50 - 0} x_1 + \frac{120 - 10}{70 - 50} x_2 + \frac{140 - 120}{100 - 70} x_3 \right) \\ &= \min \left(\frac{1}{5} x_1 + \frac{11}{2} x_2 + \frac{2}{3} x_3 \right) \end{aligned}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq 50 \\ 0 \leq x_2 \leq 20 \\ 0 \leq x_3 \leq 30 \end{array} \right.$$

Fonction linéaire par morceaux (3/3)

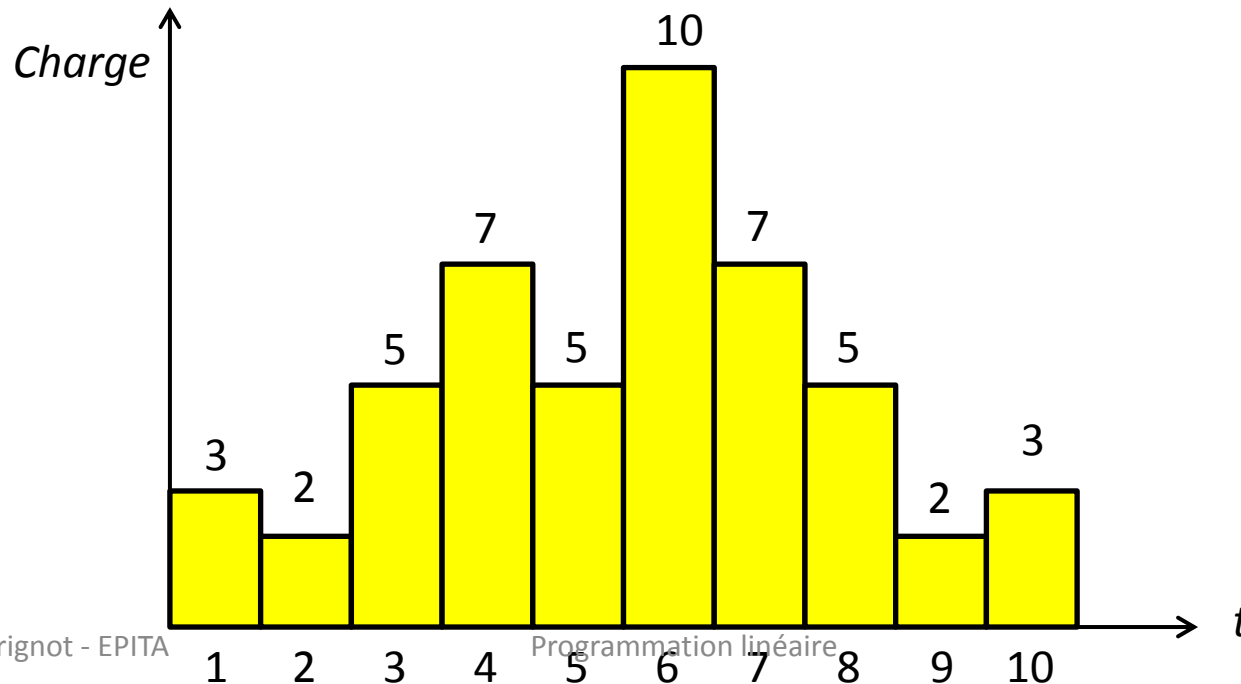
- Mais il faut modéliser le fait qu'avant de pouvoir produire des x_3 , il faut produire 20 x_2 , et qu'avant de pouvoir produire des x_2 , il faut produire 50 x_1 ...
- Modèle : pour chaque morceau, variable booléenne $y_2 = 1$ dès que tous les x_1 ont été utilisés, et qu'on se sert des x_2 .

$$\begin{cases} y_2 50 \leq x_1 \\ x_2 \leq M y_2 \end{cases}$$

- Preuve : [Exercice : si $y_2 = 0$... ; si $y_2 = 1$...]

Couverture de charge (1/4)

- Problème de construction d'horaires : On a des charges à couvrir, par pas de temps t . On veut couvrir ces charges en affectant des agents sur ces pas de temps. Chaque agent peut travailler 8h non stop.



Couverture de charge (2/4)

- Définir les différents horaires (vacations) possibles de travail : $V_1 = [0h ; 8h[$ $V_2 = [1h ; 9h[\dots$
- **Indices :** t = pas de temps ; j = indice de la vacation.
- **Variables :** x_j = nombre d'agents affectés à la vacation j .
- **Données :**
 b_t : charge à couvrir sur le pas de temps t
 $a_{j,t} = 1$ ssi la vacation j couvre le pas de temps t
- **Contraintes :** $\forall t, \sum_j a_{j,t} x_j \geq b_t$
- **Fonction de coût :** $\min \sum_j x_j$

Mais il y aura probablement des excédents de charge!

Couverture de charge (3/4)

- On veut maintenant représenter les excédents et les déficits : programmation par but.
- **Variables supplémentaires :**
 - $z_t^+ \geq 0$: excédent d'agents sur le pas de temps t
 - $z_t^- \geq 0$: déficit d'agents sur le pas de temps t
- **Contraintes :** $\forall t, \sum_j a_{j,t} x_j - b_t = z_t^+ - z_t^-$
- **Fonction de coût :** $\min(\sum_t \alpha z_t^+ + \beta z_t^-)$
avec $\beta \gg \alpha$ pour ne pas avoir trop de déficit
Mais il y aura sans doute encore du déficit !

Couverture de charge (4/4)

- On ne veut plus maintenant que de l'excédent, et lisser leur répartition.

- **Variables :**

e_t : excédent sur le pas de temps t

e_{moyen} : excédent moyen sur tous les pas de temps

e_t^+ : excédent au dessus de la moyenne sur le pas de temps t

e_t^- : excédent au dessous de la moyenne sur le pas de temps t

- **Contraintes :**

$\forall t, \sum_j a_{j,t} x_j - b_t = e_t$ // Couverture de la charge

$\forall t, e_t = e_{moyen} + e_t^+ - e_t^-$ // Définition de e_t

$e_{moyen} = (\sum_t e_t) / T$ // Définition de e_{moyen}

- **Fonction de coût :** $\min(\sum_j x_j + \sum_t (\alpha e_t^+ + \beta e_t^-))$ avec $\alpha, \beta > 1$

Minimisation du nombre d'agents et, à solution égale, lissage de la charge.

Conclusion

- Modèles pour encoder en un programme linéaire des choses qui ne le sont pas :
 - Programmation par but
 - Variables semi-continues
 - SI ... ALORS ...
 - Disjonction
 - Valeur absolue en fonction objectif et en contrainte
 - Fonction objectif quadratique
 - Fonction objectif linéaire par morceaux
- Problème de la couverture de charge avec deux variantes (excédents et déficits, sans déficit).