T.P. de programmation linéaire

Exercice 1 : crème glacée

Un fabricant désire produire 100 Kg d'une préparation de base pour crème glacée. Cette préparation doit contenir 21,5 Kg de matières grasses, 21 Kg de sucre, 1,2 Kg d'œuf et 56,3 Kg d'eau. Les ingrédients dont il dispose figurent en tête des colonnes du tableau ci-dessous ; les constituants figurent en ligne. Ce tableau précise également les pourcentages (en poids) de chaque constituant dans chaque ingrédient ainsi que le coût, au Kg, de chaque ingrédient.

		Ingrédients					
		Crème	Jaune d'oeuf frais	Lait entier en poudre	Jaune d'oeuf surgelé et sucré	Sirop de sucre de canne	eau
Constituants	Matières grasses	40	50	12	30		
	Sucre				14	70	
	Oeuf		40		40		
	Eau	60	10	88	16	30	100
	Coût en Kg	3 €	4 €	1 €	2 €	0,80 €	0,00 €

Le fabricant désire déterminer la composition du mélange de coût minimal. Ecrire le programme linéaire correspondant à ce problème, sans le résoudre.

Exercice 2 : composition d'aliments pour le bétail

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits bruts : orge, arachide, sésame. L'aliment ainsi conditionné devra comporter au moins 22% de protéines et 3,6% de graisses, pour se conformer aux exigences de la clientèle. On a indiqué ci-dessous les pourcentages de protéines et de graisses contenus, respectivement, dans l'orge, les arachides et le sésame, ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts :

Produit brut	1	2	3	Pourcentage requis
	ORGE	ARACHIDES	SESAME	
Pourcentage de protéines	12%	52%	42%	22%
Pourcentage de graisses	2%	2%	10%	3,6%
coût par tonne	25	41	39	

1/ On notera Xj (j = 1, 2, 3) la fraction de tonne de produit brut j contenu dans une tonne d'aliment. Formuler le problème algébriquement.

2/ Réduire la dimension du problème. Le résoudre géométriquement.

Exercice 3 : problème de production

1/ Une usine fabrique deux produits P1 et P2.

Chacun de ces produits demande, pour son usinage, des heures de fabrication unitaires sur les machines (ou dans les ateliers) A B C D E comme indiqué dans le tableau suivant :

	A	B	C	D	E
P1	0	1,5	2	3	3
P2	3	4	3	2	0
Disponibilité totale de chaque machine	39h	60h	57h	70h	57h

Les marges brutes de chaque produit sont respectivement :
M1 = 1 700 F
M2 = 3 200 F

Ecrire un programme linéaire correspondant.

2/ Les produits utilisent trois fournitures F1, F2 et F3 dans les conditions indiquées ci-dessous :

	F1	F2	F3
P1	0	12	8
P2	5	36	0
Unités	Kg	M^3	M^2
Stock disponible	55	432	126

Réécrire le nouveau programme linéaire. Eliminer les contraintes redondantes.

Exercice 4 : le petit déjeuner de la diva

Le célèbre cuisinier Cétesky dut un jour préparer le petit-déjeuner de la non moins célèbre cantatrice La Castafiore. Celle-ci, dont l'appétit était aussi célèbre que le contre-ut, essayait de suivre un régime basse calories car elle était un peu, beaucoup, il faut bien le dire, très forte.

Comme elle était également un peu, beaucoup, il faut bien l'avouer, très avare, le malheureux cuisinier qui tenait à s'assurer la clientèle d'une artiste de renom, devait résoudre un problème fort délicat.

Comment composer le menu (au moins une boisson et un aliment consistant) comportant au plus 1000 calories, le moins cher possible, à partir des produits dont les caractéristiques suivent :

	Poids unitaire en gramme	Calories par gramme	Prix unitaire
Toast	40g	3,4c	1,5
Miel (par toast)	15g	2,8c	3
Confiture (par toast)	10g	5c	2
Thé (une tasse)	100g	0,2c	5
Lait (un verre)	100g	0,5c	4
Beurre (par toast)	10g	8c	2,5
Œuf (sur le plat)	60g	1c	3
Bacon (la tranche)	20g	8c	5
Jus d'orange	30g	4c	6
Sucre (morceau)	5g	4c	0,5

tout en satisfaisant les caprices de la diva.

La Castafiore était capable par ses hurlements de colère de faire exploser tous les verres, glaces, vitres, se trouvant dans un rayon de quinze mètres.

Un toast devait donc toujours être tartiné de confiture, de beurre, ou de miel ; un œuf sur le plat était impérativement accompagné de bacon et d'au moins un toast beurré ; il fallait sucrer son lait et son thé !

Affolé, Cétesky se rendit dans la chambre du célèbre spécialiste de recherche opérationnelle Roseaux et lui exposa son problème.

Roseaux réfléchit quelques instant et laissa tomber : « Cher monsieur, c'est un problème de programmation linéaire en variables entières ! Ce sera cinq cents francs pour la consultation ! »

Qu'en pensez-vous ?

Exercice 5 : arrondi de la solution optimale du PL associé à un PLNE

1/ Résoudre graphiquement le PLNE suivant :

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & x_1 + 2x_2 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 - 3x_2 \leq 0 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \ entiers
\end{aligned}$$

Quelle est la solution optimale du PL associé (obtenu par relaxation de la condition d'intégrité des variables) ?

On appelle solution « arrondie » la solution obtenue en arrondissant les coordonnées de la solution optimale du PL associé.

Donner cette solution arrondie. Montrer que ce n'est pas une solution admissible du PLNE.

2/ Montrer que dans ce cas particulier la solution arrondie du PL associé au PLNE est la solution optimale du PLNE.

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & x_1 + x_2 \\
& x_1 + 3x_2 \leq 15 \\
& 4x_1 - x_2 \leq 8 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 9 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \ entiers
\end{aligned}$$

Dans le cas où la solution arrondie est une solution admissible du PLNE considéré, borner l'écart qui sépare la valeur de cette solution de celle de la solution optimale du PLNE.

Exercice 6 : nombre chromatique d’un graphe

Montrer que le problème de la recherche du nombre chromatique d’un graphe G={X,U} (c'est-à-dire du nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier les commets du graphe de telle façon que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur) peut se modéliser comme un PLNE.

Les couleurs que l’on peut utiliser étant numérotées de 0 à k où k est le degré maximal des degrés des sommets du graphe, on prendra comme inconnue x_i le numéro de la couleur associée au sommet i.

Exercice 7 : chaîne d'hôtels

La chaîne d'hôtels CHICTON a décidé de construire quatre hôtels en quatre ans sur quatre des terrains qu'elle possède déjà dans diverses régions.

La direction prévoit un coût de construction suivant la région et l'année de début des travaux défini par le tableau suivant :

Coûts de construction en millions d'euros	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4
Lyon (L)	150	125	175	150
Marseille (M)	145	150	200	250
Paris (P)	195	200	220	230
Le Havre (LH)	140	150	155	160
Bordeaux (B)	125	140	180	150
Toulouse (T)	100	125	160	180

L'implantation de ces hôtels, s'ils sont construits, est soumise aux contraintes suivantes :

1. Les hôtels de Paris et Lyon doivent être construits la même année
2. Si l'hôtel de Marseille est construit la première année, celui de Bordeaux doit l'être aussi
3. Les hôtels du Havre et de Bordeaux doivent être construits avant la troisième année
4. Les hôtels de Toulouse et Marseille ne peuvent être construits la même année
5. Les frais engagés en construction la première année ne pourront dépasser 300 millions d'euros

La chaîne CHICTON cherche le programme de construction au moindre coût.

Formaliser ce problème comme un programme linéaire en variables booléennes.

Exercice 8 : choix de sites pour des entrepôts

Une entreprise de distribution envisage l'implantation de m nouveaux entrepôts.

n sites (n > m) ont été envisagés pour leur implantation et, pour chaque site s_i, on a estimé la capacité de stockage c_i de l'entrepôt que l'on pourrait construire sur ce site.

L'entreprise cherche à déterminer les n sites sur lesquels elle doit construire ses nouveaux entrepôts de façon à maximiser la capacité totale de stockage. Mais elle désire éviter à tout prix d'avoir deux entrepôts situés à plus de 30km l'un de l'autre car elle effectue de très nombreux transports entre tous ses entrepôts. (Les n sites qui ont été envisagés sont toujours situés à moins de 30km de tous les entrepôts déjà construits).

Formuler, par un programme linéaire en variables booléennes, et de trois façons différentes, le problème du choix des sites.